TD 13 : Limites, continuité

Limites

Exercice 1 (*Calcul de limites*)**.** Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin x$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x\sqrt{x}+3}$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+e^x}{x\ln x+x^2}$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$
6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}+3x-7}{\operatorname{ch} x}$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$
8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}$
9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(3x^3+x-2)^2}{(x-1)^6}$
10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sin x}+x}{\sqrt{x-1}}$
11) $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$
12) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$

Exercice 2 (*Limites par la dérivée*)**.** Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$
2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$
3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$
4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$
5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)\sin x}{x^2}$
6) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{x}{\cos x-1}}$
7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(3+x)-\ln 3}{\ln(2+x)-\ln 2}$
8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(5x)}{\sin(2x)}$

Exercice 3. Montrer que la fonction $x\mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

Exercice 4. Soit $f : x\mapsto \dfrac{\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor}{x}$. Déterminer, si elles existent, les limites de f en 0, en $\dfrac{1}{2}$ et en $+\infty$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction T-périodique qui admet une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 6 ($\star$)**.** Soit $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ croissante et positive. On suppose $f(x+1)-f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Indication : on pourra d'abord montrer que $x\mapsto\dfrac{f(x)}{x}$ *est décroissante.*

Continuité

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ? en 1 ?

Exercice 8. On pose $g : x\mapsto \dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$. Déterminer l'ensemble de définition de g. En quel(s) point(s) peut-on prolonger par continuité la fonction g ?

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x\mapsto \begin{cases}\dfrac{\cos x-1}{x} & \text{si } x>0\\ x & \text{si } x<0\end{cases}$.

Est-ce que la fonction f admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$?

Exercice 10. Montrer que la fonction indicatrice sur $\mathbb{Q}$, notée $1_{\mathbb{Q}}$, est discontinue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

On procèdera par analyse-synthèse, en déterminant f sur $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$, puis $\mathbb{Q}$, puis $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 13 ($\star$)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$.

Théorèmes sur la continuité

Exercice 14. Soit P un polynôme réel de degré impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

Exercice 15. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet au moins un point fixe. *Indication : on pourra considérer l'application* $g : x \mapsto f(x) - x$.

Exercice 16. Soit $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ deux fonctions continues. On suppose que f est bornée. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$. Ce résultat est-il vrai si f est croissante ?

Exercice 18. Montrer que l'équation $\sqrt{x^2 - \pi} \sin x + x^2 \cos x = -1$ admet au moins une solution.

Exercice 19. Existe-t-il une application bijective et continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$? De $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$? De $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 20. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est <u>coercive</u> si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que si f est coercive et continue, alors elle atteint son minimum, c'est-à-dire :

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \geq f(x_0)$$

Exercice 21 ($\star$)**.** Un cycliste parcourt une distance de 20 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel ce cycliste aura parcouru exactement 10 km. (La demi-heure doit commencer après son départ et se terminer avant son arrivée).

Exercice 22 (*Vrai ou faux, fonctions*)**.** Vrai ou faux ? Justifier.

1) Toute fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ est croissante au voisinage de $+\infty$.
2) Toute fonction périodique possède une plus petite période strictement positive.
3) Toute fonction continue sur un intervalle borné est bornée.
4) La fonction partie entière est continue sur $[0,1[$.
5) L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert.